



TITLE:

# リーマン面上の有界正則函数について(函数環に関連した諸問題(II))

AUTHOR(S):

林, 実樹広

---

CITATION:

林, 実樹広. リーマン面上の有界正則函数について(函数環に関連した諸問題(II)). 数理解析研究所講究録 1988, 654: 81-92

ISSUE DATE:

1988-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100499>

RIGHT:

## リーマン面上の有界正則函数について

北大教養 林 実樹広 (Mikihiko Hayashi)

1. リーマン面  $R$  上の有界正則函数全体を  $H^\infty(R)$  と表す.

$H^\infty(R)$  はノルム

$$\|f\|_\infty = \sup \{ |f(z)| : z \in R \}$$

により, 可換な Banach 環となる. さて与えられたリーマン面上にどのくらい  $H^\infty(R)$  函数があるかについては, 特別な場合を除いては, よく分っていない.

ここでは,  $H^\infty(R)$  が  $R$  の点を分離する (よくいってしまえば「分ける」) として,  $R$  の分岐二重被覆面  $\tilde{R}$  を考え,  $H^\infty(\tilde{R})$  が  $\tilde{R}$  の点を分離する下りの十分条件を与える (§3). 尚, これは中井三留先生 (名古屋大) との共同研究 [3] の一部である.

次節では, リーマン面の専門外の人を念頭に, リーマン面の例の作り方について多少くわしく述べておきます. 基本的な idea がこの例に基づいているため述べたものであっても, 専門の人には, 何とあたりまえのこととくどくど書いてあるとあ

此を受けられるかも知れない。

2. リーマン面の例を作るには、いわゆるノリとハサミによる方法が今も有効である。この方法を理解するには多少の直観を認めた方がよいが、この直観に慣れていない人には、どこか理解を越えたものに感じられるかも知れない。無論、ノリとハサミによる方法も、直観に依る言葉だけで述べることも可能である。直観的な述べ方は、このための手順だけを表した見取図のようなもので、設計図の方はこの見取図をもとに容易に想像できる。この節では、この見取図から設計図を作るとしたら必要になるであろう手続きについて気付いた事柄をいくつか述べて見たい。実際には、設計図を君にたてこるで、見取図よりもかえ、てわかり難くなる下けなので、これが役に立つものではないと見えますか、直観的説明で満足できない人に少しなりとも参考になれば幸いです。

尚、直観的な構成法については竹内端三「函数論(下巻)」(裳華房)が、またリーマン面の厳密な取扱いについては、Ahlfors-Sario「Riemann Surfaces」(Princeton)が参考になるものと思います。

さて、与えられた Hausdorff 位相空間  $R$  が、[[境界付]]リーマン面であるとは、定義により次の (i), (ii), (iii) を満たす (

局所座標系と呼ばれる) system  $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$  があることである:

- (i)  $\{U_\alpha\}$  は  $R$  の開被覆
- (ii) 写像  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$  [or  $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ ] は同相. [部分集合  $\Gamma = \bigcup_\alpha \varphi_\alpha^{-1}(\{ \operatorname{Im} z = 0 \})$  は  $R$  の境界と呼ばれる.]

- (iii)  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  ならば, 写像

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$[\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \setminus \Gamma) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta \setminus \Gamma)]$$

は等角 (i.e., 正則かつ 1 対 1) である.

[注] 1) (i), (ii) より, [境界付] 位相多様体の定義である.

2) 部分集合  $\Gamma$  は "境界" と呼ばれるが,  $R$  の位相では  $\Gamma$  の点もすべて  $R$  の内点であるので, 位相的 "境界" と区別して考える. リーマン面では,  $R$  を含むリーマン面  $R'$  を考え,  $R'$  の中で  $R$  の境界  $\partial R$  が  $\Gamma$  と等しくなるようにできる. こう考えることに約束しておけば, この種の混乱は除ける.

3) 鏡像の原理により,  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  は  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap \Gamma)$  の近傍に等角に拡張される. このことは, 境界付リーマン面の場合  $R \setminus \Gamma$  上の等角構造から自然に  $\Gamma$  上の等角構造が一意に定まることを意味する. 例えば,  $R$  が平面上の Jordan 曲線  $\Gamma$  で囲ま

れた内領域として,

$\Gamma$  が解析曲線ならば,

$R \setminus \Gamma$  から  $\Gamma$  に導入される

等角構造は, 平面の

それと同じである. しかし, 一般には

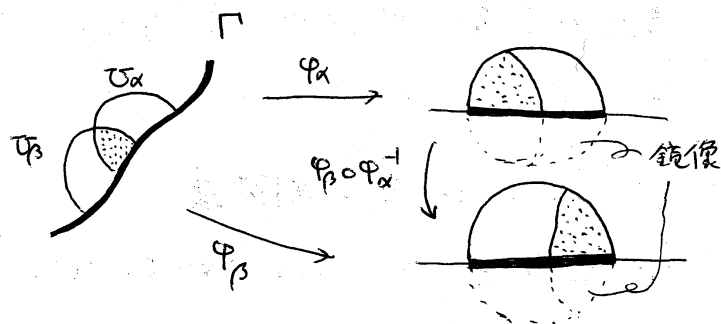
リーマンの写像定理により,  $R$  を解析曲線で囲まれた領域  $R'$

(たとえば, 単位円板) に写像して,  $R'$  を含む平面の等角

構造が,  $R \setminus \Gamma$  から  $\Gamma$  に導入される等角構造と一致する. リー

マン面では  $R \setminus \Gamma$  の等角構造から決まるものだけと問題にする

ことが多いので,  $\Gamma$  を先に考えるときには注意がいる.



### 例1 $R$ が平面の連結開集合:

$\mathcal{U}_0 = R$ ,  $\varphi_0(z) = z$  という, 1組のペアだけからなる局所座標近傍系  $\{\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha=0}$  が (i), (ii), (iii) を満たす.

### 例2 $\mathcal{U}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (リーマン環):

$\mathcal{U}_1 = \{ |z| < \infty \}$ ,  $\varphi_1(z) = z$ ;  $\mathcal{U}_2 = \{ |\frac{1}{z}| < \infty \}$ ,  $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$

として, 2組のペア  $\{\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha=1,2}$  が局所座標系を与える.

実際,  $\varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = \{ 0 < |w| < \infty \}$  上で  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(w) = \frac{1}{w}$  となり

(iii) が満たされる. (i), (ii)については明らか.

(注) 上の2例は, リーマン面というにはあまりに trivial 過ぎるから, 2変数感にかかるとは知れない. 条件の (i), (ii) で

は、 $\varphi_\alpha$  という 1対1写像により、局所的に複素平面の等角構造（あるいは、函数論）がコピーされている。条件 (iii) はこのような等角構造が座標系に依らないことを保障しているだけである。従って、リーマン面上の函数論は、局所的に見え限り、平面の函数論のコピー、つまり借りものである。2, 新しいことは何もない。大域的に考えようとしてはじめてリーマン面として整理される。例1のように、1つの座標で完全なコピーが取れれば、コピーとオリジナルの区別はなく, "trivial" になる, 2当然なのである。

例3  $R = S^1 - \{ |z| \leq 1 \}$  は境界のないリーマン面であるが,  $R' = S^1 - \{ |z| < 1 \}$  は境界  $\Gamma = \{ |z| = 1 \}$  を持つ境界付リーマン面である。このように、もともと境界のないリーマン面  $R = R' \setminus \Gamma$  に境界を付けて境界付リーマン面  $R' = R \cup \Gamma$  を作くことができる。鏡像の原理により、このような境界  $\Gamma$  があれば、その付け方は  $R$  から一意に決まる。（部分的に境界を付けるとしてもあるので, "局所的に一意" というべきかも知れない）

上で、定義せよ'に便、下用語の意味を以下に補うであらう。

定義  $R$  上の複素数値関数  $f$  が正則とは、 $\forall \alpha \in A$  に対し、 $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$  が  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  上の正則関数となること。

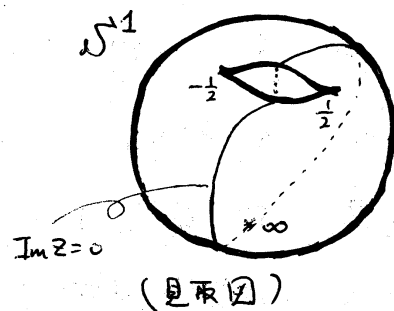
定義  $R, R'$  をリーマン面として、 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}, \{U_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'}\}$  をそれぞれ局所座標系とする。写像  $\varphi: R \rightarrow R'$  が analytic

とは,  $\forall \alpha' \in A'$  に対して,  $\varphi_{\alpha'} \circ \varphi$  が  $\varphi^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha'})$  ( $\subset R$ ) 上の正則関数となること. ( $\Leftrightarrow \forall \alpha \in A, \forall \alpha' \in A'$  に対し,  $\varphi_{\alpha'} \circ \varphi \circ \varphi_{\alpha}^{-1}$  が  $\varphi_{\alpha}(\varphi^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha'}) \cap \mathcal{U}_{\alpha})$  ( $\subset \mathbb{C}$ ) 上の正則関数となること).

定義 2つのリーマン面  $R, R'$  が等角同値とは,  $R$  から  $R'$  の上への 1対1 analytic 写像があること.

定義  $R$  上の 2つの座標近傍  $\{\mathcal{U}_{\alpha}, \varphi_{\alpha}\}$  と  $\{\mathcal{V}_{\beta}, \varphi_{\beta}\}$  が  $R$  上に同じ等角構造を定めるとは, 恒等写像  $\text{id}: R \text{ with } \{\mathcal{U}_{\alpha}, \varphi_{\alpha}\} \rightarrow R \text{ with } \{\mathcal{V}_{\beta}, \varphi_{\beta}\}$  が analytic. ( $\Leftrightarrow \{\mathcal{U}_{\alpha}, \varphi_{\alpha}\} \cup \{\mathcal{V}_{\beta}, \varphi_{\beta}\}$  が (iii) を満たす).

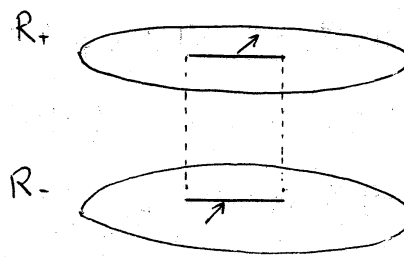
(注) リーマン面では等角同値なものと同視して扱うことが多い. たとえば,  $\mathbb{D}^1 = \{z \mid |z| \leq 1\}$  は  $\mathbb{D}^1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  と等角同値であり, リーマン面としては例3の通りに  $\mathbb{D}^1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  には境界が付けられる. (しかし, これを  $\mathbb{D}^1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subset \mathbb{D}^1$  という関係の中で実現しようとするとき, いわゆるハサミで  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  に沿って  $\mathbb{D}^1$  を切るという表現に<sup>(下図)</sup>なる. 正確にはむしろ, 等角同値な  $\mathbb{D}^1 = \{z \mid |z| \leq 1\}$  を考えた上で, 例3の通りに  $\mathbb{D}^1 = \{z \mid |z| < 1\}$  を考えるというべきかも知れない.



さて, 2枚の単位円面  $R_+, R_-$  を  $\text{slit } [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  で切り

開き (ハサミ), slitの兩岸を互い違いに張り合せ (ノリ)

でリーマン面  $\tilde{R}$  を作る例を考  
えよう.



(見取図)

また, slit  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  を切り開  
くとは,  $R_{\pm} - [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  をリーマ

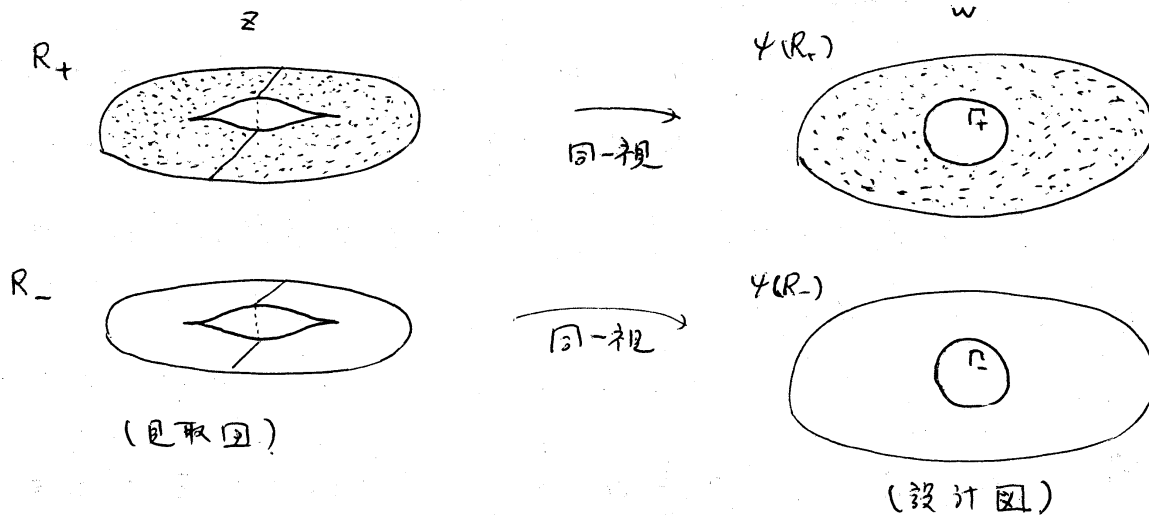
ン面と見て,  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  に境界を付けることに対応する. 上の

(注) で述べたことに従うと,  $\mathcal{D}^1 - [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  から  $\mathcal{D}^1 - \{ |z| \leq 1 \}$  への

等角写像を  $\psi$  とし,  $\psi(R_{\pm}) \cup \Gamma_{\pm}$  を考えればよい. 但,

$\Gamma_{\pm} = \{ |z| = 1 \}$  とする (ここでは, 区別するため  $\Gamma_+$  と  $\Gamma_-$  の2

つのコピーをとれど  $R_+$ ,  $R_-$  に対応して考へる). これに  $\delta$



(設計図)

り, 兩岸  $\{ z: |z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0 \}$  と  $\{ z: |z|=1, \operatorname{Im} z \leq 0 \}$  が出来た

ことになる. 次に張り合せ (ノリ) であるが, これは以下の

ように全く位相的の手続きである:

位相空間の張り合せ  $X, Y$  を位相空間,  $E$  を  $X$  の部分集

合,  $\psi: E \rightarrow Y$  を連続写像とすると,



$$X \cup_{\varphi} Y = X + Y / \sim \quad (\text{直和位相空間 } X + Y \text{ の商空間})$$

により位相空間  $X \cup_{\varphi} Y$  を定義する。但、商空間の同値類は、 $y \in \varphi(E)$  のとき、 $\{y\} \cup \varphi^{-1}(y)$ 、その他はすべて 1 点のみからなる同値類となる。

上の例では、 $X = \varphi(R_+) \cup \Gamma_+$ ,  $Y = \varphi(R_-) \cup \Gamma_-$ ,  $E = \Gamma = \{w \mid |w| = 1\}$  として、 $\varphi: E \rightarrow Y$  を  $\varphi(w) = \bar{w} (= \frac{1}{w})$  により定めたとき、

$$\tilde{R} = (\varphi(R_+) \cup \Gamma_+) \cup_{\varphi} (\varphi(R_-) \cup \Gamma_-)$$

を考察することにする。 $\tilde{R}$  が Hausdorff 空間であり、多様体となることは General topology の演習問題である。自然に座標系をみつければ  $\tilde{R}$  がリーマン面となること、 $\varphi(w) = \frac{1}{w}$  が正則に  $\varphi(R_+)$  から  $\varphi(R_-)$  への写像に拡張されるので明らかである。

以上のことに納得がいけば、今後は見取図だけで済ませておかわらないと考える。

**3.** 以下、 $R$  をリーマン面とする。 $M^{\infty}(R)$  で  $R$  上の有理型関数で、あるコンパクト集合の外では有界なものの全体を表す。 $\mathcal{D}(R)$  を  $R$  の点  $a$  の集りで、 $a$  で極をもつ  $M^{\infty}(R)$  関数が存在する点全体の集合とする。 $H^{\infty}(R)$  で分離されない点の集合  $\{a \in R : \exists b \in R \text{ such that } f(a) = f(b) \text{ for } \forall f \in H^{\infty}(R)\}$  が孤立点のみからなる、ついでとて、 $H^{\infty}(R)$  は  $R$  の点に 弱分

離れという.

さて,  $\tilde{R}$  をもう一つのリーマン面,  $\pi: \tilde{R} \rightarrow R \in R$  の *unlimited 2重被覆写像* とする. つまり,  $\pi$  は *proper* の解析写像で,

$$\max \{ \# \pi^{-1}(a) : a \in R \} = 2$$

とある. このとき,  $\# \pi^{-1}(a) = 1$  となる点があれば,  $\pi^{-1}(a) = \{\alpha\}$  は 1 点で,  $\alpha$  は  $\pi$  の分岐点に対応する.

定理 (3)  $\pi: \tilde{R} \rightarrow R$  を上で述べた *unlimited 2重被覆写像*

とし,  $H^\infty(R)$  は 【弱】分離 とする. もし, 下記の条件 (1),

(2), (3) をみたす開集合  $W$  が  $R$  の中にとれれば,  $H^\infty(\tilde{R})$  も  $\tilde{R}$  の点で 【弱】分離 して,  $\rho(\tilde{R}) = \pi^{-1}(\rho(R))$  が成り立つ.

(1)  $H^\infty(\tilde{W})$  は 【弱】分離. 但,  $\tilde{W} = \pi^{-1}(W)$ .

(2)  $\partial W$  は  $\rho(R)$  のコンパクト集合.

(3)  $\pi^{-1}(R \setminus W)$  は互いに交じり合わない 2 つの開集合  $V_+$ ,  $V_-$  の和で表され, 各  $V_\pm$  は  $R \setminus W$  と  $\pi$  により同相になり, 2 つ.

証明は,  $\rho(R)$  の中に局所座標  $W$  をとり,  $W$  の中に *slit*  $[a, b]$  を考え,  $R \setminus [a, b]$  の 2 つのコピー  $R_+$  と  $R_-$  を *slit* の両岸にとり, 2 つを互いに逆さに張り合せてできるリーマン面  $\tilde{R}$  を

例に説明する。  $\tilde{R}$  サリ-マン面となることは、リーマン面の定義の中で、連結性を除けば可なり局所的な条件であるから、前節の最後の例と同様に示めせる。  $R_+ \cup R_- \subset \tilde{R}$  と考え、  $\tilde{\alpha} \in R_+ \cup R_-$  に対応する  $R$  の点  $\alpha$  を自然に対応させる写像  $\pi$  を、被覆写像  $\pi: \tilde{R} \rightarrow R$  を定める。  $\tilde{w} = \pi^{-1}(w)$  として

$$G = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}} \circ \pi$$

は一価の分岐を定め、  $\tilde{W}$  上の一価正則函数と成る。(ii)が満たす)

$R_+$  の点  $a_+$  に対応する  $R_-$  の点  $a_-$ 、逆に  $a_-$  を  $a_+$  に対応させるを、  $\tau: R_+ \cup R_- \rightarrow R_+ \cup R_-$  は  $\tilde{R}$  から  $\tilde{R}$  への解析写像と成り、

$$G \circ \tau = -G$$

を成たす。(これは、  $\sqrt{z}$  の分岐  $\sqrt{z}$  と  $-\sqrt{z}$  の2個であることに対応する事実)。

$\max(|a|, |b|) < c < 1$  なる数  $c$  を固定して、  $\{|z|=c\}$  を含み円環状の近傍  $V \in W$  の中に考え、  $V \cap [a, b] = \emptyset$  とする。

$u = \frac{1}{2} \log \frac{z-a}{z-b}$  は  $V$  上で一価正則あり、Cauchyの積分定理により

$$\begin{aligned} (\#) \quad u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{u(\xi)}{\xi-z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{u(\xi)}{\xi-z} d\xi \quad \text{on } V \\ &= u_0(z) - u_1(z), \quad \text{但, } \partial V = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \end{aligned}$$

と成り、  $G$  の分岐を、  $\pi^{-1}(V) \cap R_+$  上で  $G = e^u \circ \pi$  と成る

そう に選んでおくと,  $\pi^{-1}(V) \cap R_+ \neq \emptyset$

$$G = (e^{-u_0} \circ \pi) (e^{-u_1} \circ \pi), \text{ i.e., } G e^{-u_0} \circ \pi = e^{-u_1} \circ \pi$$

が成立する. さて, 2,

$$F = \begin{cases} e^{-u_0} \circ \pi & \text{on } W^+ = \pi^{-1}(W) \cap R^+ \\ -e^{-u_1} \circ \pi & \text{on } W^- = \pi^{-1}(W) \cap R^- \\ G e^{-u_0} \circ \pi & \text{on } \tilde{W} = \pi^{-1}(W) \end{cases}$$

と定めれば,  $F$  は well-defined で  $\tilde{R}$  上の有界型関数で,  
 $F \in M^\infty(\tilde{R})$  が示せる.  $F$  の上下の sheet  $R_+, R_-$  と分離する  
 ことより,  $M^\infty(\tilde{R})$  従,  $H^\infty(\tilde{R})$  は  $\tilde{R}$  の点と弱分離し,  
 $H^\infty(R)$  が  $R$  の点と分離されるが,  $F$  の作りより  $H^\infty(\tilde{R})$  が  $\tilde{R}$   
 の点と分離することはわかる. この辺の細い証明には [2]  
 の結果が必要である. また, (井) の使,  $T$  Cauchy の積分公  
 式は本来 リーマン面  $R$  の上で書かれるべきもので, このため  
 には, [1] で構成した Cauchy 微分が必要である.

#### 参考文献

1. T.W. Gamelin and M. Hayashi, The algebra of the bounded analytic functions on a Riemann surface, (to appear).
2. M. Hayashi, The maximal ideal space of the bounded analytic functions on a Riemann surface, J. Math. Soc. Japan 39 (1987), 337-344

3. M. Hayashi and M. Nakai, Point separation by bounded analytic functions of a covering Riemann surface, (to appear).